

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напрямів підготовки
«інформатика», «прикладна математика»

Видання друге, виправлене та доповнене



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

Богдан

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту
України (лист № 1/11-12145 від 22.12.2011)*

Рецензенти:

Іванчов М. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет ім. Івана Франка),

Каленюк П. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет «Львівська політехніка»),

Мойсичин В. М., доктор технічних наук, професор (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу)

Гой Т. П.

Г59 Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Вид. 2-ге, випр. та доп. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. — 360 с.

ISBN 978-966-10-3529-3

У посібнику викладено основи теорії звичайних диференціальних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з природничих наук. Кожна тема супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування. Наведено також приклади застосування пакета символічних обчислень Maple для інтегрування диференціальних рівнянь.

Для студентів напрямів підготовки «інформатика», «прикладна математика». Може бути корисним для студентів природничих та інженерно-технічних напрямів підготовки.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-966-10-3529-3

© Т. П. Гой, О. В. Махней, 2014
© Навчальна книга – Богдан, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	11
РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ .	13
Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння та диференціальні моделі	13
1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання	13
2. Основні означення й поняття	19
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих	21
Питання до лекції 1	23
Вправи до лекції 1	23
Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної (загальна теорія)	24
1. Основні означення й поняття	24
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші	25
3. Класифікація розв'язків	27
4. Геометричне та механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	30
Питання до лекції 2	34
Вправи до лекції 2	35
Лекція 3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, інтегровні у квадратах	36
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	36
2. Однорідні рівняння	39
3. Рівняння, звідні до однорідних	42
Питання до лекції 3	46
Вправи до лекції 3	47

Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них	48
1. Лінійне диференціальне рівняння та методи його розв'язування	48
2. Властивості розв'язків лінійних рівнянь	51
3. Рівняння Я. Бернуллі	52
4. Рівняння Ріккати	56
Питання до лекції 4	58
Вправи до лекції 4	58
Лекція 5. Рівняння у повних диференціалах та звідні до них	59
1. Рівняння у повних диференціалах	59
2. Інтегрувальний множник та деякі способи його знаходження	62
3. Теореми про існування, неєдиність та загальний вигляд інтегрувального множника	66
Питання до лекції 5	69
Вправи до лекції 5	70
Лекція 6. Неявні диференціальні рівняння першого порядку	71
1. Основні означення й поняття	71
2. Задача Коші. Класифікація розв'язків	73
3. Рівняння степеня n	78
Питання до лекції 6	80
Вправи до лекції 6	80
Лекція 7. Неявні диференціальні рівняння першого порядку (продовження)	81
1. Метод уведення параметра	81
2. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро	83
3. Задача про ізогональні траєкторії	86
Питання до лекції 7	89
Вправи до лекції 7	90
Лекція 8. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку	91
1. Принцип стискаючих відображень	91

2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші	94
3. Продовження розв'язку задачі Коші	99
4. Коректність задачі Коші	101
Питання до лекції 8	102
Вправи до лекції 8	103
Лекція 9. Диференціальні моделі	104
1. Побудова диференціальних моделей природничих наук	104
2. Розв'язування геометричних задач з допомогою диференціальних рівнянь	110
3. Розв'язування задач з допомогою інтегральних рівнянь	111
Питання до лекції 9	113
Вправи до лекції 9	113
Додаток 1. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку	114
РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ . .	124
Лекція 10. Диференціальні рівняння вищих порядків	124
1. Основні поняття й означення. Задача Коші	124
2. Класифікація розв'язків	127
3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n	129
Питання до лекції 10	134
Вправи до лекції 10	135
Лекція 11. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку	136
1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних	136
2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної	139

3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних	141
4. Рівняння з точними похідними	142
Питання до лекції 11	145
Вправи до лекції 11	146
Лекція 12. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку	147
1. Основні означення й поняття	147
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	149
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції	150
4. Основна теорема	153
5. Формула Остроградського–Ліувілля	154
Питання до лекції 12	157
Вправи до лекції 12	157
Лекція 13. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	159
1. Основні означення й поняття	159
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел	160
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел	163
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	165
Питання до лекції 13	169
Вправи до лекції 13	170
Лекція 14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку	171
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	171
2. Метод варіації довільних сталих	173
3. Метод Коші	175
4. Метод невизначених коефіцієнтів	178
Питання до лекції 14	183

Вправи до лекції 14	183
Лекція 15. Лінійні однорідні рівняння другого порядку	184
1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку	184
2. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок	186
3. Інтегрування лінійних рівнянь з допомогою степеневих рядів	188
Питання до лекції 15	195
Вправи до лекції 15	195
Лекція 16. Диференціальні моделі коливальних процесів	196
1. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	196
2. Застосування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	200
3. Диференціальна модель математичного маятника	204
Питання до лекції 16	206
Вправи до лекції 16	207
Лекція 17. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку	208
1. Основні означення й поняття	208
2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі	209
3. Функція Гріна крайової задачі	211
4. Крайові задачі на власні значення	215
Питання до лекції 17	218
Вправи до лекції 17	218
Додаток 2. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків	219

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	228
Лекція 18. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	228
1. Основні означення й поняття	228
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків	232
3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача	235
4. Лінійні однорідні системи	238
Питання до лекції 18	240
Вправи до лекції 18	241
Лекція 19. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	242
1. Лінійно залежні та лінійно незалежні сукупності функцій	242
2. Формула Остроградського–Якобі	245
3. Основна теорема	246
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера	247
Питання до лекції 19	255
Вправи до лекції 19	256
Лекція 20. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	257
1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи	257
2. Метод варіації довільних сталих	259
3. Метод невизначених коефіцієнтів	262
4. Метод Д'Аламбера	266
Питання до лекції 20	267
Вправи до лекції 20	268
Додаток 3. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь	269

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	273
Лекція 21. Лінійні однорідні рівняння з частинни- ми похідними першого порядку	273
1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинни- ми похідними першого порядку з відповідною си- стемою характеристик	273
2. Побудова загального розв'язку лінійного однорід- ного рівняння	278
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння .	280
Питання до лекції 21	282
Вправи до лекції 21	283
Лекція 22. Квазілінійні та нелінійні рівняння з ча- стинними похідними першого порядку	284
1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рів- няння першого порядку	284
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку	287
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першо- го порядку	290
4. Рівняння Пфаффа	293
Питання до лекції 22	295
Вправи до лекції 22	296
Додаток 4. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування рівнянь з частинни- ми похідними першого порядку	297
РОЗДІЛ 5. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕ- РЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	302
Лекція 23. Основи теорії стійкості за Ляпуновим .	302
1. Основні означення й поняття	302
2. Дослідження на стійкість точок спокою	306
3. Стійкість за першим наближенням	308
4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара	312
Питання до лекції 23	313

Вправи до лекції 23	314
Лекція 24. Теорема Ляпунова. Фазова площина . .	315
1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова	315
2. Класифікація точок спокою автономної системи . .	318
Питання до лекції 24	329
Вправи до лекції 24	329
Додаток 5. Застосування математичного пакета Maple для дослідження на стійкість розв’яз- ків звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем	330
Додаток 6. Основи роботи з математичним паке- том Maple	339
КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ	347
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .	352
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	355

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння» займає чільне місце у підготовці фахівців з інформатики, математики, прикладної математики тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних рівнянь для студентів напрямів підготовки «інформатика», «прикладна математика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 5 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції та відповідного практичного заняття.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикла-

ду чи задачі.

Знак ► означає завершення доведення теореми.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми. Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У додатках до розділів для майже всіх розв'язаних у відповідних темах прикладів наводяться їх розв'язання з допомогою пакета символічних обчислень Maple. З основами роботи з ним читач може ознайомитись у додатку 6.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

У другому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Автори висловлюють щиро вдячність рецензентам професорам М. І. Іванчову, П. І. Каленюку, В. М. Мойсишину за корисні критичні зауваження й методичні поради, які безумовно сприяли покращенню якості рукопису.

Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника. Усю інформацію просимо надсилати на e-mail: tarasgoy@yahoo.com, makhney1@yahoo.com.

Лекція 14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку

План

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

2. Метод варіації довільних сталих.

3. Метод Коші.

4. Метод невизначених коефіцієнтів.

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots \\ \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \end{aligned} \quad (14.1)$$

і відповідне однорідне рівняння

$$L[y] = 0. \quad (14.2)$$

Виявляється, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (14.1) завжди можна знайти, якщо відомі загальний розв'язок рівняння (14.2) і будь-який частинний розв'язок рівняння (14.1). Це впливає з такого твердження.

Теорема 1. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (14.1) дорівнює сумі будь-якого його частинного розв'язку та загального розв'язку однорідного рівняння (14.2).*

Доведення. Нехай $Y = Y(x)$ — відомий частинний розв'язок рівняння (14.1), тобто $L[Y] \equiv f(x)$. Виконаємо заміну $y = z + Y$, де $z = z(x)$ — нова шукана функція. Підставляючи її у (14.1) та враховуючи лінійність оператора L , одержуємо, що $L[y] = L[z + Y] = L[z] + L[Y] = f(x)$. Оскільки $L[Y] = f(x)$, то

$$L[z] = 0, \quad (14.3)$$

тобто z — розв'язок лінійного однорідного рівняння (14.2). Тоді згідно з Основною теоремою (лекція 12) загальним розв'язком

рівняння (14.3) є $z = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$, де y_1, y_2, \dots, y_n — деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі. Таким чином,

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + Y. \quad (14.4)$$

Покажемо, що формула (14.4) визначає загальний розв'язок рівняння (14.1). Згідно з означенням загального розв'язку диференціального рівняння n -го порядку для цього потрібно показати, що з (14.4) при належному виборі сталих C_1, C_2, \dots, C_n можна одержати розв'язок, який задовольняє довільні початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Послідовно диференціюючи (14.4), знаходимо:

$$\begin{cases} y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + Y, \\ y' = C_1y'_1 + C_2y'_2 + \dots + C_ny'_n + Y', \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \dots + C_ny_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Підставляючи в цю систему $x = x_0$, матимемо неоднорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими C_1, C_2, \dots, C_n , визначником якої є $W(x_0)$. Оскільки y_1, y_2, \dots, y_n — фундаментальна система розв'язків, то $W(x_0) \neq 0$. Таким чином, сталі C_1, C_2, \dots, C_n з отриманої системи визначаються однозначно, а тому розв'язок (14.4) справді є загальним. ►

Теорема 2. *Нехай права частина лінійного неоднорідного рівняння (14.1) є сумою двох доданків, тобто*

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x). \quad (14.5)$$

Якщо y_1 — частинний розв'язок рівняння $L[y] = f_1(x)$, а y_2 — частинний розв'язок рівняння $L[y] = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння (14.5).

Доведення теореми випливає з того, що

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv f_1(x) + f_2(x). \quad \blacktriangleright$$

нянь (умова Ліпшіца), теоретичної механіки.

ЛІУВІЛЛЬ Жозеф (Liouville Joseph; 1809–1882) — французький математик. Автор важливих праць з комплексного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь (формула Остроградського–Ліувілля). Першим строго довів неінтегровність у квадратурах деяких класів диференціальних рівнянь. Разом зі Ж. Штурмом розробив теорію крайових задач на власні значення для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку (задача Штурма–Ліувілля).

ЛЯПУНОВ Олександр Михайлович (1857–1918) — російський математик і механік. Засновник математичної теорії стійкості руху, автор важливих досліджень про фігури рівноваги рідини, що рівномірно обертається.

НЬЮТОН Ісаак (Newton Isaac; 1643–1727) — англійський фізик, математик, механік, астроном. Заклав теоретичні основи механіки і астрономії, відкрив закон всесвітнього тяжіння, разом із Лейбніцем вважається творцем диференціального та інтегрального числення. Винайшов метод інтегрування диференціальних рівнянь розвиненням їхніх розв'язків у степеневі ряди.

ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович (1801–1862) — український і російський математик (родом з Полтавщини), член Петербурзької Академії наук та багатьох закордонних академій наук. Розв'язав низку важливих задач математичної фізики, теорії звичайних диференціальних рівнянь (формула Остроградського–Ліувілля), варіаційного числення, теоретичної механіки. Запропонував спосіб зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної.

ПЕАНО Джузеппе (Peano Giuse; 1858–1932) — італійський математик. Запропонував систему аксіом арифметики, довів теорему існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння з неперервною правою частиною.

ПУАНКАРЕ Анрі Жюль (Poincare Henri Jules; 1854–1912) — французький математик, фізик, астроном і філософ. Автор понад 1000 праць з диференціальних рівнянь, теорії потенціалів, математичної фізики, небесної механіки. Один із засновників якісної теорії диференціальних рівнянь.

ПФАФФ Йоганн Фрідріх (Pfaff Johann Friedrich; 1765–1825) — німецький математик і астроном. Відомий дослідженнями з теорії диференціальних рівнянь (рівняння Пфаффа).

РАУС Едвард Джон (Routh Edward John; 1831–1907) — англійський механік і математик. Відомий працями з теоретичної механіки. Займався проблемами стійкості рівноваги і руху (критерій Рауса–Гурвіца). Встановив спеціальний алгоритм для визначення

кількості коренів алгебричного рівняння, які мають додатні дійсні частини (теорема Рауса).

РІККАТІ Джакомо Франческо (Riccati Jacopo Francesco; 1676–1754) — італійський математик та інженер. Основні праці стосуються інтегрального числення й диференціальних рівнянь, зокрема інтегровності у квадратурах одного класу диференціальних рівнянь першого порядку (спеціальне рівняння Ріккати).

СИЛЬВЕСТР Джеймс Джозеф (Sylvester James Joseph; 1814–1897) — англійський математик. Основні праці з алгебри (критерій Сильвестра), теорії чисел, теорії ймовірностей, механіки і математичної фізики.

ТЕЙЛОР Брук (Taylor Brook; 1685–1731) — англійський математик. Вивів загальну формулу (формула Тейлора) розвинення функцій у степеневі ряди (ряди Тейлора), започаткував математичну теорію коливання струни.

ФРЕДГОЛЬМ Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866–1927) — шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння Фредгольма, теореми Фредгольма).

ФУР'Є Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768–1830) — французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці. Зокрема, вивів диференціальне рівняння теплопровідності, розробив метод розв'язування цього рівняння при певних крайових умовах (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження найрізноманітніших задач, пов'язаних з хвилями і коливаннями.

ХОПФ Еберхард (Hopf Eberhard; 1902–1983) — німецький і американський математик. Основні роботи стосуються теорії динамічних систем і диференціальних рівнянь з частинними похідними.

ШТУРМ Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François; 1803–1855) — швейцарський математик. Основні праці присвячені задачам математичної фізики та пов'язаним з ними крайовим задачам на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь (задача Штурма–Ліувілля). Заклав основи теорії коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

ЯКОБІ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob; 1804–1851) — німецький математик. Йому належать відкриття в теорії чисел, алгебрі, варіаційному численні, інтегральному численні та теорії диференціальних рівнянь. Досліджував диференціальні рівняння динаміки, розробив нові методи їх розв'язування.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Агафонов С. А. Дифференциальные уравнения / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Т. В. Муратова. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 352 с.
2. Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. — М. : Едиториал УРСС, 2001. — 384 с.
3. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння / Ю. Д. Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк. — Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. — 470 с.
4. Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. — 288 с.
5. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К. : Либідь, 2004. — 408 с.
6. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. — М. : Высшая школа, 1967. — 564 с.
7. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. — К. : Либідь, 2003. — 504 с.
8. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. — К. : Либідь, 2003. — 600 с.
9. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. — К. : Техніка, 2003. — 368 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

10. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 208 с.
11. Білоусова Л. І. Курс вищої математики у середовищі Maple / Л. І. Білоусова, М. М. Горонескуль. — Х. : УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. — 412 с.
12. Боднар Д. І. Диференціальні рівняння: методи розв'язування / Д. І. Боднар, Л. М. Буяк, О. Г. Возняк. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. — 112 с.
13. Босс В. Лекции по математике: дифференциальные уравнения / В. Босс. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 208 с.
14. Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння / Гой Т. П., Махней О. В. — Івано-Франківськ : Сімик, 2012. — 356 с.
15. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов — М. : СОЛОН-Пресс, 2006. — 720 с.
16. Эдвардс Ч. Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и МАТЛАВ / Ч. Г. Эдвардс, Д. Э. Пенни. — М. : ООО «И. Д. Вильямс», 2008. — 1104 с.
17. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс. — М. : Мир, 1986. — 243 с.
18. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с.
19. Журавлев С. Г. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук / С. Г. Журавлев, В. В. Аниковский. — М. : Экзамен, 2005. — 128 с.

20. Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / Н. Х. Ибрагимов. — Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2007. — 421 с.
21. Махней О. В. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень / О. В. Махней, Т. П. Гой. — Івано-Франківськ : Сімик, 2013. — 304 с.
22. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев. — Минск : Выш. школа, 1973. — 560 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Багаточлен характеристичний – власне 200
 160 – гармонічне 198
 – Чебишова 168 – – згасаюче 199
 – гармонічне накладене 202
- Визначник Вронського (вронскі-ан) 151, 243
 – характеристичний 248
 Вронскіан (визначник Вронського) 151, 243
 Вузол нестійкий 321, 326
 – стійкий 320, 326
- Графік руху 33
- Дані початкові 25, 125, 229, 234
- Задача Коші 25, 73, 124, 229, 233, 280, 287
 – крайова 208
 – – на власні значення 215
 – – неоднорідна 209
 – – однорідна 209
 – – Штурма–Ліувілля 217
 – початкова (задача Коші) 25
- Залежність лінійна 150, 242
- Збурення 306
- Значення власне 216
- Ізокліна 31
- Інваріант 186
- Інтеграл диференціального рівняння 28
 – загальний 28, 75, 127, 231
 – незалежний 231
 – перший 143, 231
 – – незалежний 231
 – системи 230
- Коефіцієнт рівняння 24, 147
 – стиснення 92
- Коливання вільне 200
- Команда Maple 341
- Комбінація інтегровна 231
- Коректність задачі Коші 101
- Крива інтегральна 20, 229
 – логістична 16
- Критерій Л'єнара–Шипара 312
 – Рауса–Гурвіца 312
 – Сильвестра 316
- Лінеаризація 105
- Маятник математичний 204
- Метод варіації довільних сталих 49, 173, 259
 – виключення 236
 – відокремлення змінних 37
 – Д'Аламбера 266
 – Ейлера 70, 247
 – ізоклін 31
 – ітерацій (послідовних наближень) 92
 – Й. Бернуллі 50
 – Коші 175
 – Лагранжа 49, 173, 259
 – невизначених коефіцієнтів 178, 262
 – підстановки 50
 – послідовних наближень (ітерацій) 92
 – степеневих рядів 188
 – введення параметра 81, 82, 132
- Метрика (відстань) простору 91
- Множина Maple 341
- Множник інтегрувальний 62, 144

- Наближення послідовні 94
- Обвідна 30, 75
- Оператор 92
- інтегральний Фредгольма 97
 - лінійний диференціальний 148
 - стискаючий 92
- Опція Марле 341
- Площина фазова 232
- Поверхня інтегральна 274
- Поле напрямів 30
- Положення рівноваги 306
- Портрет фазовий 318
- Порядок рівняння 19
- з частинними похідними 274
 - звичайного диференціального 19, 147
- Принцип стискаючих відображень 92
- Простір метричний 91
- n -вимірний евклідовий 91
 - повний 92
 - фазовий 232
- Пряма фазова 232
- Ранг крайової задачі 210
- Резонанс 202
- Рівняння автономне 34
- Бесселя 168
 - гармонічного осцилятора 197
 - диференціальне 13
 - – з частинними похідними 20, 273
 - – звичайне 19
 - – сім'ї кривих 21
 - з точними похідними 142
 - Ейлера 166
 - з відокремленими змінними 37
 - з відокремлюваними змінними 36
 - інтегральне 111
 - квазілінійне 284
 - Клеро 84
 - коливань 197
 - – вимушених 197, 200
 - – вільних 197
 - Лагранжа 83, 167
 - лінійне другого порядку 184
 - – з частинними похідними першого порядку 275
 - – зі сталими коефіцієнтами 159, 178
 - – неоднорідне n -го порядку 147
 - – – з частинними похідними першого порядку 284
 - – – першого порядку 48
 - – – однорідне n -го порядку 147
 - – – з частинними похідними першого порядку 276
 - – – першого порядку 48
 - – – першого порядку 48
 - неявне 71
 - , яке містить тільки похідну 79
 - , не розв'язане відносно похідної 71
 - – однорідне 39, 141
 - першого порядку степеня n 78
 - Пфаффа 293
 - Ріккати 56
 - стаціонарне 34
 - у повних диференціалах 59
 - узагальнено-однорідне 45
 - характеристичне 160, 248
 - Чебишова 167
 - Я. Бернуллі 52
- Розв'язок звичайного диференціального рівняння 20, 25, 71, 124
- – загальний 27, 127
 - – – у параметричній формі 28, 127
 - – комплексний 162

- особливий 29, 75, 128
- тривіальний 149
- у квадратурах 21
- частинний 29, 75, 128
- рівняння з частинними похідними 274
- загальний 278, 286
- крайової задачі 209
- системи звичайних диференціальних рівнянь 229
- Розв’язок системи асимптотично стійкий 304, 307
 - загальний 230
 - збурений 304
 - незбурений 304
 - нестійкий 304
 - особливий 230
 - стійкий 303, 306
 - тривіальний 239, 306
 - частинний 230
- Рух 33, 126, 233, 303
 - аперіодичний згасаючий 200
 - усталений 233
- Ряд степеневий 188
 - узагальнений 192
- Система автономна 233
 - звичайних диференціальних рівнянь першого порядку 228
 - лінійна 238
 - неоднорідна 239
 - однорідна 239
 - нормальна 229
 - першого наближення 308
 - розв’язків фундаментальна 153, 246
 - стаціонарна 233
 - характеристик 276, 285, 286
 - характеристична 276
- Сідло 322
- Сім’я інтегральних кривих 20
 - Список Maple 341
 - Стан спокою 34, 233
- Теорема Коші 27, 95, 127, 229
 - Ляпунова 310, 315
 - Пеано 25, 127, 229
 - про неперервну залежність розв’язків від параметру 101
 - про неперервну залежність розв’язків від початкових умов 102
- Точка аналітичності рівняння 189
 - нерухома 92
 - особлива 28, 191
 - регулярна 192
 - простору 91
 - рівноваги 34
 - руху початкова 234
 - спокою 34, 233, 306
- Траєкторія ізогональна 86
 - ортогональна 86
 - руху 233
 - фазова 233
- Умова Ліпшица 98
 - необхідна і достатня лінійної незалежності функцій 153, 245
 - лінійної залежності функцій 151, 243
 - незалежності розв’язків 152, 244
 - сумісності системи нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку 291
 - повної інтегровності рівняння Пфаффа 294
- Умови крайові 208
 - однорідні 209
 - початкові 25, 125, 229, 280, 287

- Фокус нестійкий 325
– стійкий 324
Формула Абеля 187
– Ейлера 162
– Коші 131, 177
– Остроградського–Ліувілля 156
– Остроградського–Якобі 245
Функція аналітична 189
– власна 216
– Гріна 212
– Коші 175
– Ляпунова 316
– однорідна 39
Центр 324
Цикл граничний 318
Число характеристичне 160, 248
color 343
complex 343
D 114
DEplot 344
DEtools 344
diff 342
dsolve 114, 269
fsolve 343
implicit 118
intfactor 118
linecolor 345
numchar 346
numpoints 343
odeplot 344
Order 341
PDEplot 345
PDEtools 344
plot 343
plot3d 343
plots 344
scaling 343
scene 345
simplify 342
solve 343
stepsize 345
type 344
with 344



Навчальне видання

ГОЙ Тарас Петрович
МАХНЕЙ Олександр Володимирович
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Видання друге, виправлене та доповнене

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Андрій Кравчук*
Дизайн та комп'ютерна верстка *Тараса Гоя,*
Олександра Махнея

Підписано до друку 12.01.2014. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Computer Modern Roman. Умовн. друк. арк. 20,93.
Умовн. фарбо-відб. 20,93.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com
www.bogdan-books.com

ISBN 978-966-10-3529-3

